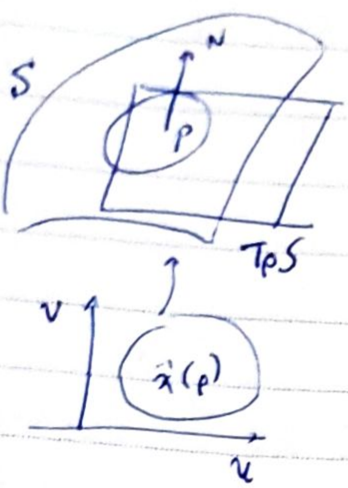
10/12/2018

Κυριες διευθυνσεις - καμπυλες καμπυλοτητας



• $w = aX_u + bX_v$ είναι κύρια διευθυνση

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

E, F υπολογίζονται στο $X^{-1}(p)$

• Η κανονική καμπύλη $c(t) = X(u(t), v(t))$ είναι καμπύλη καμπυλότητας

$$\begin{vmatrix} (v'(t))^2 & -u'(t)v'(t) & (u'(t))^2 \\ E(u(t)\ldots) & F(\ldots) & G(\ldots) \\ e(\ldots) & f(\ldots) & g(\ldots) \end{vmatrix}$$

Έστω ότι οι παραμετρικές καμπύλες του X είναι καμπύλες καμπυλότητας και ισχύει $k_1 > k_2$. Τότε $X_u \perp X_v$

δηλαδή $F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$, $f = \langle LX_u, X_v \rangle = \langle$πολλ του $X_u, X_v \rangle = 0$

$\boxed{F = 0 = f}$ οι πίνακες $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ είναι διαγώνιοι

Πρόταση

Έστω S επιφάνεια με $k_1 > k_2$. Τότε ισχύει $F = 0 = f$ αν-ν οι παραμετρικές καμπύλες του $X: U \to S$ είναι καμπύλες καμπυλότητας

Απόδειξη

Αντίστροφα, έστω ότι $F = 0 = f$

$$\begin{vmatrix} (v'(t))^2 & -u'(t)v'(t) & (u'(t))^2 \\ E(\ldots) & F(\ldots) & G(\ldots) \\ e(\ldots) & f(\ldots) & g(\ldots) \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow$

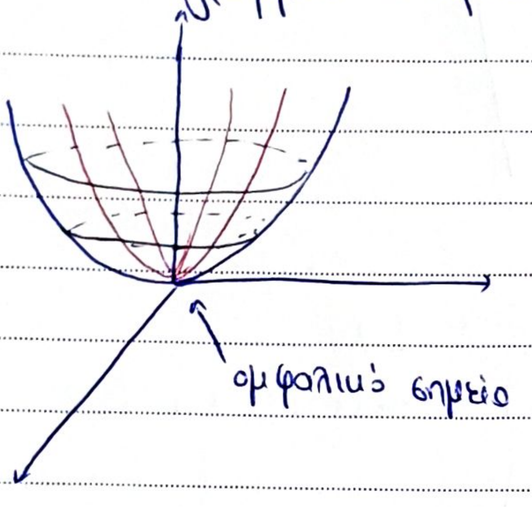
$\Leftrightarrow u'(t)v'(t)(Eg - eG) = 0$

Έστω ότι $Eg - Ge = 0 \Leftrightarrow \frac{e}{E} = \frac{0}{0} = \frac{g}{G} \Rightarrow k_1 = k_2$, άτοπο

$\Rightarrow u'(t) = 0$ ή $v'(t) = 0$

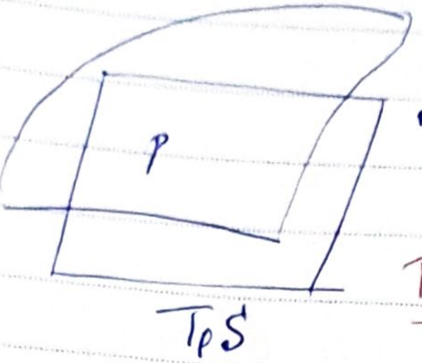
Θεώρημα

Έστω S επιφάνεια με $k_1 > k_2$. Για κάθε σημείο $p \in S$ υπάρχει σύστημα συντεταγμένων $X : U \to S$ του οποίου οι παραμετρικές καμπύλες είναι καμπύλες καμπυλότητας
(δίκτυο γραμμών καμπυλότητας)



Τρίτη Θεμελιώδη Μορφή

Ορισμός: Καλούμε τρίτη θεμελιώδη μορφή της S στο $p \in S$ την τετραγωνική μορφή $III : T_pS \to \mathbb{R}$



$$III_p(w) = \langle L_p w, L_p w \rangle_p = \|L_p w\|_p^2$$

Παρατήρηση: $III_p(w) \geq 0 \ \forall w \in T_pS$

$T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ $(w_1, w_2) \mapsto \langle L_p w_1, L_p w_2 \rangle_p$

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|_p^2$$

$$II_p(w) = \langle L_p w, w \rangle_p$$

$$L_p = -dN_p$$

$III_p(w) = \|dN_p(w)\|^2$ πίνακας της III

Έστω $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ σύστημα συντεταγμένων

Τότε ο πίνακας της III ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$ είναι

$$\begin{pmatrix} III(X_u) & \langle LX_u, LX_v \rangle \\ \langle LX_u, LX_v \rangle & III(X_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|N_u\|^2 & \langle N_u, N_v \rangle \\ \langle N_u, N_v \rangle & \|N_v\|^2 \end{pmatrix}$$

$$III(X_u) = \|LX_u\|^2 = \|N_u\|^2$$

$$\langle LX_u, LX_v \rangle = \langle N_u, N_v \rangle$$

$$III(X_v) = \|LX_v\|^2 = \|N_v\|^2$$

Θεώρημα

Έστω p τυχαίο σημείο επιφάνειας S. Τότε ισχύει

$$III_p - 2H(p)\, II_p + K(p)\, I_p = 0$$

Απόδειξη

$L_p : T_pS \to T_pS$, $H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{trace} L_p$

$$K(p) = \det L_p$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της L_p είναι $\chi(t) = t^2 - \operatorname{trace} L_p + \det L_p$

$\Leftrightarrow \chi(t) = t^2 - 2H(p)t + K(p) \xRightarrow{\Theta}$

$$L_p^2 - 2H(p) L_p + K(p)\, Id = 0$$

$\forall\, w \in T_pS : L_p^2 w - 2H(p) L_p w + K(p) w = 0$

$\Rightarrow \langle \overset{(=L_p \circ L_p)}{L_p^2 w}, w \rangle - 2H(p) \langle L_p w, w \rangle + K(p) \langle w, w \rangle = 0$

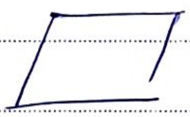
$\Leftrightarrow \langle L_p w, L_p w \rangle - 2H(p)\, II_p(w) + K(p)\, I_p(w) = 0$

$\Leftrightarrow III_p(w) - 2H(p)\, III_p(w) + K(p)\, I_p(w) = 0$

Ελαχιστικές Επιφάνειες

Ορισμός: Μια επιφάνεια καλείται ελαχιστική $\Leftrightarrow H = 0$

Παραδείγματα επίπεδα



αλυσοειδής

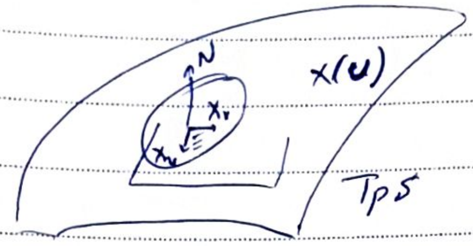
ελικοειδής

$III_p - \cancel{2H(p) II_p}^{\,0} + K(p) I_p = 0$

$\Rightarrow K(p) I_p = -III_p \le 0 \Rightarrow K(p) \le 0$

Παρατηρηση : Καθε ελαχ. επιφάνεια εχει καμπυλη Gauß $K \le 0$.

— — — — — — — — —



$x: U \to S$ σύστημα συντεταγμένων με παρ/λας u, v

$\{X_u, X_v, N\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$

$u \to 1, \quad v \to 2$

$$
\left.
\begin{aligned}
X_{uu} &= \Gamma_{11}^{1} X_u + \Gamma_{11}^{2} X_v + \underbrace{l_1}_{=e} N \\
X_{uv} &= \Gamma_{12}^{1} X_u + \Gamma_{12}^{2} X_v + \underbrace{l_2}_{=f} N \\
X_{vu} &= \Gamma_{21}^{1} X_u + \Gamma_{21}^{2} X_v + \underbrace{l_3}_{=f} N \\
X_{vv} &= \Gamma_{22}^{1} X_u + \Gamma_{22}^{2} X_v + \underbrace{l_4}_{=g} N
\end{aligned}
\right\} \text{τύποι του Gauß}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
N_u &= b_{11} X_u + b_{12} X_v \\
N_v &= b_{21} X_u + b_{22} X_v
\end{aligned}
\right\} \text{τύποι Weingarden}
$$

$L X_u = -N_u$

$L X_v = -N_v$

$(b_{ij}) = -(a_{ij}) =$ πίνακας της απεικόνισης Weingarden ως προς X_u, X_v

$= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$

$l_1 = \langle X_{uu}, N \rangle = e$

$l_2 = \langle X_{uv}, N \rangle = f$

$l_3 = \langle X_{vu}, N \rangle = f$

$l_4 = \langle X_{vv}, N \rangle = g$

Άρα έχουμε: $\begin{cases} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \langle X_{uu}, X_u \rangle \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = \langle X_{uu}, X_v \rangle \end{cases}$ $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2}\langle X_u, X_u \rangle_u = \frac{1}{2}E_u$$

$$\langle X_{uu}, X_v \rangle = (\langle X_u, X_v \rangle)_u - \langle X_u, X_{vu} \rangle = F - \langle X_u, X_{uv} \rangle$$
$$= F - \frac{1}{2}\langle X_u, X_u \rangle_v = F - \frac{1}{2}E_v$$

άρα $\begin{cases} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}E_u \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = F_u - \frac{1}{2}E_v \end{cases}$

Συμβολισμός:

$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k : U \to \mathbb{R}$ καλούνται σύμβολα Christofell

Λήμμα: Τα σύμβολα Christofell εξαρτώνται από τα E, F, G και τις παραγώγους της 1ης τάξης.

$\left.\begin{array}{l} (X_{uu})_v = (X_{uv})_u \\ (X_{uv})_v = (X_{vv})_u \\ N_{uv} = N_{vu} \end{array}\right\} \iff A_i X_u + B_i X_v + C_i N = 0 \quad i = 1, 2, 3$

$$\boxed{K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}}$$

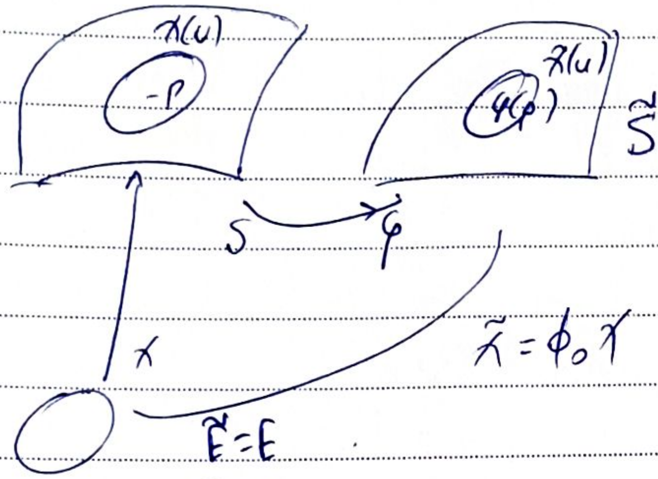
$$B_1 = \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + e b_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2 - f b_{21} - (\Gamma_{12}^2)_u$$

$$B_1 = 0 \overset{b_{22}=\dots}{\underset{b_{21}=\dots}{\iff}} \dots \iff (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^2 =$$
$$= -E\,\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -EK$$

<u>Έξοχο Θεώρημα</u>

Η καμπυλότητα Gauß εξαρτάται μόνο από τα E, F, G και τις παραγώγους τους έως $2^{ης}$ τάξης.

<u>Συνέπεια</u>: Έστω $S, \tilde{S}$ επιφάνεια ισομετρίας και $\phi: S \to \tilde{S}$ μια ισομετρία



Άρα, $\tilde{K}(\phi(p)) = K(p)$

$\tilde{E} = E$
$\tilde{F} = F$
$\tilde{G} = G$